18/4/2018

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ HASSE

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω G ομάδα. Συμβολίζουμε $A_G = \{H : H \text{ υποομάδα της } G\}$

Ορίζουμε διάταξη στο A_G ως εξής: $H_1 \leq H_2$ αν $H_1 \subseteq H_2$

Το διάγραμμα Hasse της G αποτελείται από κορυφές και ακμές. Οι κορυφές αντιστοιχούν στα στοιχεία του A_G αν $H_1, H_2 \in A_G$ υπάρχει γραμμή μεταξύ

$H_1 \leq' H_2$ αν $H_1 \subseteq H_2$

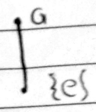
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) $G=\{e\}$ $\quad \mathcal{L}_G = \{G\}$

ΔΙΑΓΡ. HASSE

$\cdot\, G$

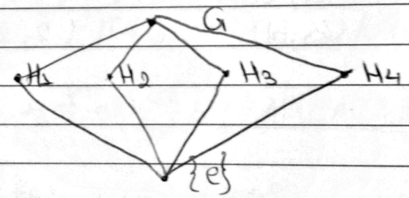
2) $G=(\mathbb{Z}_2,+)$ $\quad \mathcal{L}_G = \{G, \{e\}\}$



3) $G=(S_3,\circ)$ $\quad$ υποομάδες της G.

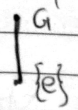
$$\mathcal{L}_G = \left\{ G, \overset{H_1}{\langle \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 1&3&2 \end{pmatrix} \rangle}, \overset{H_2}{\langle \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 3&2&1 \end{pmatrix} \rangle}, \overset{H_3}{\langle \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 2&1&3 \end{pmatrix} \rangle}, \overset{H_4}{\langle \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 3&1&2 \end{pmatrix} \rangle}, \{e\} \right\}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ HASSE της S_3



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\quad G=(\mathbb{Z}_p,+)$ $\quad p$ πρώτος

Έχουμε δείξει ότι οι μόνες υποομάδες της G είναι οι $\{e\}$ και G. Άρα $\mathcal{L}_G = \{\{e\}, G\}$ και διάγραμμα Hasse.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\quad$ Έστω $G=\langle a \rangle$ κυκλικής τάξης 4 με γεννήτορα a.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $G=\langle a \rangle$ κυκλική με $ord(a)=n \geq 2$. Τότε η απεικόνιση Φ:

Θετικούς διαιρέτες $\longrightarrow$ υποομάδα της G
d του n

με $\Phi(d) = \langle a^d \rangle$ είναι 1-1 και ΕΠΙ.

Επιπλέον αν d_1, d_2 διαιρέτες του n
$\Phi(d_1) \subseteq \Phi(d_2)$ αν και μόνο αν $d_2 | d_1$

<u>Απόδειξη</u> (Του Επιπλέον)

$\Longleftarrow$ Υποθ. $d_2 | d_1$. Άρα υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με
$d_1 = k \cdot d_2$. Άρα $a^{d_1} = a^{kd_2} = (a^{d_2})^k \in \langle a^{d_2} \rangle$
Άρα $\Phi(d_1) \subseteq \Phi(d_2)$

$\Longrightarrow$ Έστω d_1, d_2 διαιρέτες του n και $\Phi(d_1) \subseteq \Phi(d_2)$
Θα δ.ο. $d_2 | d_1$
Αφού $\Phi(d_1) \subseteq \Phi(d_2) \Longrightarrow \langle a^{d_1} \rangle \subseteq \langle a^{d_2} \rangle$
Άρα $a^{d_1} \in \langle a^{d_2} \rangle$. Συνεπώς υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$
με $a^{d_1} = (a^{d_2})^k$
Αλλά $\langle a^{d_2} \rangle = \{ a^{d_2}, a^{2 \cdot d_2}, \dots, a^{\frac{n}{d_2} \cdot d_2} = e \}$
Άρα υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ $0 \leq k \leq \frac{n}{d_2}$ ώστε

$a^{d_1} = a^{d_2 \cdot k}$ $(*)$ Αφού $0 < d_1 \leq n$ και
$0 < d_2 \cdot k \leq n$ $(*) \Longrightarrow d_1 = d_2 k \Longrightarrow d_2 | d_1$

<u>Υπενθύμιση</u> Αν $G = \langle a \rangle$ κυκλικής τάξης
n και $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ $a^{d_1} = a^{d_2} \Longleftrightarrow$
$n | d_1 - d_2$
Αν όμως $0 < d_1 \leq n$ και $0 < d_2 \leq n$ φανερά
$n | d_1 - d_2 \Longrightarrow d_1 = d_2$
Αν $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ με $1 \leq d_1$ κ' $d_2 \leq 5$
$\Longrightarrow d_1 - d_2 \in \{-4, -3, -2, \dots, 4\}$ $(**)$

Αν $5 | d_1 - d_2$ από $(**) \Rightarrow d_1 = d_2$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $n = 4$ Θετικοί διαιρέτες του 4
$\{1, 2, 3, 4\}$ $G = \langle a \rangle$ τάξη $a = n = 4$.

Διάγραμμα Hasse

$G = \langle a \rangle$

$H = \langle a^2 \rangle$

$\{e\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $G = \langle a \rangle$ τάξης p^6

Θετικοί διαιρέτες $p^6 = \{1 = p^0, p^1 = p, p^2, p^3, p^3, p^4, p^5, p^6\}$

Διάγραμμα Hasse της G

$\langle a^{p^0} \rangle = \langle a \rangle = G$

$\langle a^{p^1} \rangle$

$\langle a^{p^2} \rangle$

$\langle a^{p^3} \rangle$

$\langle a^{p^4} \rangle$

$\langle a^{p^5} \rangle$

$\{e\} = \langle a^{p^6} \rangle$

- $G = \langle a \rangle$ κυκλική τάξης $(2 \cdot 3)^2 = 36$

Θετικοί διαιρέτες του $36 = \{2^b \cdot 3^c : 0 \le b \le 2 \quad 0 \le c \le 2\}$

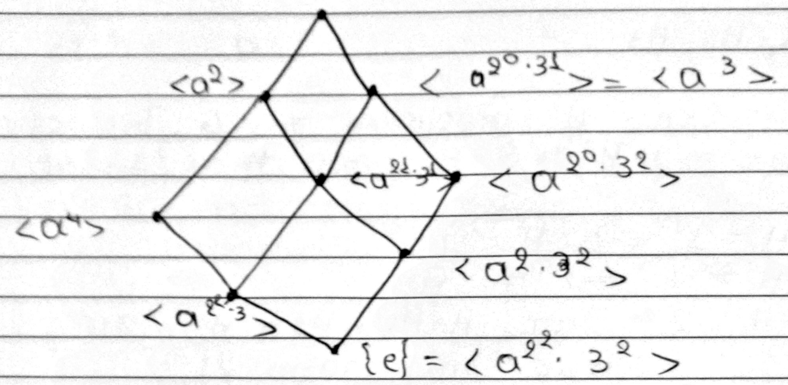
άρα 9 στοιχεία.

Συνεπώς το διάγραμμα Hasse της G έχει 9 κορυφές

Πότε $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \mid 2^{b_1} \cdot 3^{b_2}$ για $a_1, b_1 \ge 0$

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u> Πρέπει και αρκεί ταυτόχρονα $a_1 \le b_1$ ΚΑΙ $a_2 \le b_2$

$G = \langle a^1 \rangle = \langle a^{2^0 \cdot 3^0} \rangle$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν $|G| = p^2 \cdot q^2$ με p, q διαφ. πρώτους το διάγραμμα Hasse της G έχει το ίδιο σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $G_1 = \langle a \rangle$, $G_2 = \langle b \rangle$ δύο κυκλικές τάξης 2 θέτουμε $G = G_1 \times G_2$ το ευθύ (ή καρτεσιανό) γινόμενο.

Ξέρουμε $G_1 = \{e_{G_1}, a\}$, $G_2 = \{e_{G_2}, b\}$.

Άρα $G_1 * G_2 = \{(e_{G_1}, e_{G_2}) = e_G, (e_{G_1}, b), (a, e_{G_2}), (a, b)\}$

Έχουμε δει ότι G τάξης 4 αλλά όχι κυκλική κάθε στοιχείο της G διαφορετικό του e_G έχει τάξη 2.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Βρείτε το σύνολο Λ_G των υποομάδων της G.

Θέτουμε $H_1 = \langle (e_{G_1}, b) \rangle = \{e_G, (e_{G_1}, b)\}$

$H_2 = \langle (a, e_{G_2}) \rangle = \{e_G, (a, e_{G_2})\}$

$H_3 = \langle (a, b) \rangle = \{e_G, (a, b)\}$

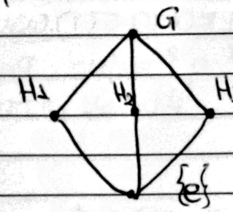
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Η G έχει ακριβώς 5 υποομάδες τις εξής.

$\{e\}$, G, H_1, H_2, H_3

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω H υποομάδα της G. Τότε από θ. Lagrange $\#H \mid \#G = 4$, άρα $\#H \in \{1, 2, 4\}$

Αν $\#H = 1 \Rightarrow H = \{e^G\}$
Αν $\#H = 4 \Rightarrow H = G$
Αν $\#H = 2$ τότε $H = H_1$ ή H_2 ή H_3, γιατί
$H = \{e^G$, στοιχείο της G τάξης $2\}$

Διάγραμμα Hasse



Αφού $\#H_i = \#H_j = 2$
και $H_i \neq H_j$ για $i \neq j$
ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ
$H_i \subseteq H_j$ ούτε
$H_j \subseteq H_i$ για $i \neq j$

ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΟΜΑΔΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $(G_1, *_1)$ και $(G_2, *_2)$ δύο ομάδες.
Μία απεικόνιση $\phi : G_1 \to G_2$ λέγεται ομομορφισμός ομάδων αν

$$\phi(a *_1 b) = (\phi(a)) *_2 (\phi(b))$$

Ένας ομομορφισμός ομάδων $\phi : G_1 \to G_2$ λέγεται
α) μονομορφισμός αν είναι 1-1
β) επιμορφισμός αν είναι ΕΠΙ
γ) ισομορφισμός αν ϕ είναι 1-1 και ΕΠΙ.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $\phi : (G_1, *_1) \to (G_2, *_2)$ ΟΜΟΜ. ΟΜΑΔΩΝ τότε:

1) $\phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$

2) Αν $a \in G$ $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$

Δηλαδή η ϕ στέλνει το ουδέτερο της πρώτης ομάδας στο ουδέτερο της δεύτερης. Επίσης για $a \in G_1$ η εικόνα μέσω της ϕ του a^{-1} είναι το αντίστροφο του $\phi(a)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) Έχουμε $e_{G_1} = e_{G_1} *_1 e_{G_1}$, άρα

$$\phi(e_{G_1}) *_2 e_{G_2} = \phi(e_{G_1}) = \phi(e_{G_1} *_1 e_{G_1})$$

$$\overset{}{\underset{\phi \text{ ομομ.}}{=}} \phi(e_{G_1}) *_2 \phi(e_{G_1})$$

Αφού G_2 ομάδα $\phi(e_{G_1}) *_2 e_{G_2} = \phi(e_{G_1}) *_2 \phi(e_{G_1})$

$\Longrightarrow \phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$.

2) Από 1) $\phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$

Άρα για $a \in G_1$ $e_{G_2} = \phi(e_{G_1}) =$

$$\phi(a *_1 a^{-1}) \overset{\phi \text{ ομομ.}}{=} \phi(a) *_2 \phi(a^{-1})$$

Ομοίως $e_{G_2} = \phi(e_{G_1}) = \phi(a^{-1} *_1 a) = \phi(a^{-1}) *_2 \phi(a)$

Συνεπώς, $\phi(a^{-1}) *_2 \phi(a) = \phi(a) *_2 \phi(a^{-1}) = e_{G_2}$

Άρα $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$